## 12.13　ヘルツの挑戦：遠隔作用とマクスウェル方程式

ヘルツは1884年に，遠隔作用論から出発し，巧妙な方法によってマクスウェル方程式を導いた．もちろんそれはヘルツ自身が認めているように，遠隔作用論とマクスウェル方程式が同等であることを示したのではない．マクスウェル方程式を導くためには，変位電流の導入に相当する飛躍が必要である．ヘルツの原論文通りではその飛躍がわかりにくいので，まずマクスウェル方程式を書き直した上で，ヘルツがどのようにして遠隔作用論から正しい結果を導いたかを検証してみよう．

ヘルツは電荷がない場合を考えている．そのとき電磁場はベクトルポテンシャルによって $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$，$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ のように表すことができる．$\mathbf{A}$ は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0, \qquad \Box^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

を満たす．電荷がないときは別の表示も可能である（次節参照）．ガウスの法則 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$ に基づいて，あるベクトル場 $\mathbf{A}_\mathrm{m}$（キルヒホフの1871年の論文に書かれている．磁気ベクトルポテンシャルと呼ぶことにしよう）によって電場を $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_\mathrm{m}$ と表すこともできる．だが，アンペール-マクスウェルの法則が $\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{B} + \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}_\mathrm{m}) = \mu_0 \mathbf{J}$ になるから，$\mathbf{A}$ の場合と異なり $\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}_\mathrm{m}$ と書くことができない．そこで

$$\mathbf{B}_1 = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_1, \qquad \mathbf{A}_1 = -\mu_0 \nabla^{-2} \mathbf{J} \tag{12.77}$$

によって決まる磁場 $\mathbf{B}_1$ を別にしておけば

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}_\mathrm{m}$$

になる．磁流密度 $\mathbf{J}_\mathrm{m} = \frac{1}{\mu_0}\dot{\mathbf{B}}_1$ を定義すると $\mathbf{A}_\mathrm{m}$ は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}_\mathrm{m} = 0, \qquad \Box^2 \mathbf{A}_\mathrm{m} = -\mu_0 \mathbf{J}_\mathrm{m}$$

を満たす．マクスウェル方程式は $\mathbf{A}$，$\mathbf{A}_\mathrm{m}$ のいずれでも書き直すことができる．

ここでヘルツの試みに戻ろう．$\mathbf{A}_1$ とそれから得られる電磁場 $\mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{A}}_1$，$\mathbf{B}_1 = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_1$ は遠隔作用の電磁場である．この電場を $\mathbf{E}_1 = -\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_{\mathrm{m}1}$ と書くと

$$\mathbf{A}_{\mathrm{m}1} = -\nabla^{-2} \boldsymbol{\nabla} \times \dot{\mathbf{A}}_1$$

である．遠隔作用では電磁場は $\mathbf{E}_1$，$\mathbf{B}_1$ にとどまるが，ヘルツの飛躍はこの $\mathbf{A}_{\mathrm{m1}}$ が磁場をつくると考えたことである．これによって $-\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}_{\mathrm{m1}}$ が $\mathbf{B}_1$ につけ加わり磁場は

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1 - \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}_{\mathrm{m1}} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_1 + \frac{1}{c^2}\nabla^{-2}\boldsymbol{\nabla}\times\ddot{\mathbf{A}}_1$$

になる．これを $\mathbf{B}_2 = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_2$ とするとベクトルポテンシャルも

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + \frac{1}{c^2}\nabla^{-2}\ddot{\mathbf{A}}_1$$

のように変更を受ける．電場も $\mathbf{E}_2 = -\dot{\mathbf{A}}_2 = -\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_{\mathrm{m2}}$ になるから

$$\mathbf{A}_{\mathrm{m2}} = \mathbf{A}_{\mathrm{m1}} + \frac{1}{c^2}\nabla^{-2}\ddot{\mathbf{A}}_{\mathrm{m1}}$$

が得られる．このため磁場は $\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_1 - \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}_{\mathrm{m2}}$ となり，$\mathbf{B}_3 = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_3$ によってベクトルポテンシャルも変化する．以下同様に，無限回同じ操作をくり返すと，ベクトルポテンシャルと磁気ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \left(1+\frac{1}{c^2}\nabla^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{c^4}\nabla^{-4}\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\cdots\right)\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1+\frac{1}{c^2}\nabla^{-2}\ddot{\mathbf{A}}$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{m}} = \left(1+\frac{1}{c^2}\nabla^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{c^4}\nabla^{-4}\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\cdots\right)\mathbf{A}_{\mathrm{m1}} = \mathbf{A}_{\mathrm{m1}}+\frac{1}{c^2}\nabla^{-2}\ddot{\mathbf{A}}_{\mathrm{m}}$$

になる．両辺にラプラース演算子を作用させると

$$\nabla^2\mathbf{A} = \nabla^2\mathbf{A}_1 + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}}, \qquad \nabla^2\mathbf{A}_{\mathrm{m}} = \nabla^2\mathbf{A}_{\mathrm{m1}} + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}}_{\mathrm{m}}$$

すなわち

$$\Box^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}, \qquad \Box^2\mathbf{A}_{\mathrm{m}} = -\mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{m}}$$

を満たすようになる．また

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{m}} = 0$$

を満たしている．これらはこの節の前半で示したようにマクスウェル方程式と同等である．ヘルツはマクスウェル方程式を $\frac{1}{c^2}$ によって級数展開した式を発見したのだ．ヘルツはこの理論的な仕事によってマクスウェル方程式の正しさに確信を持ち，その実験的検証へと向かうのである．

## 12.14　ヘヴィサイド：磁気モノポールとマクスウェル方程式

4つの方程式からなるマクスウェル方程式は，電流も電荷もない場合は極めて対称性がよいが，電流と電荷があるとその対称性が崩れる．それは，磁気モノポールが自然界に存在しないことに原因がある．もしモノポールが存在したらマクスウェル方程式はどうなるであろうか．モノポールが存在する場合にマクスウェル方程式を対称的な形に書いたのはヘヴィサイドで1885年のことだった．モノポールが存在すれば磁荷密度 $\varrho_{\rm m}$ が定義され，電荷のガウスの法則にならって

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\mu_0\varrho_{\rm m} \tag{12.78}$$

とすべきである．またモノポールが運動することによってモノポールの流れ，磁流が起こるから磁流密度 $\mathbf{J}_{\rm m}$ を定義しなければならない．モノポールも電荷と同じく保存するとすれば，連続の方程式

$$\dot{\varrho}_{\rm m}+\nabla\cdot\mathbf{J}_{\rm m}=0$$

が成り立たねばならない．このときファラデイの法則はもはや正しくない．$\nabla\times\mathbf{E}$ の発散密度が0になるのに対し，$\dot{\mathbf{B}}$ の発散密度は，(12.78) を代入して，さらに連続の方程式を使えば $\nabla\cdot\dot{\mathbf{B}}=\mu_0\dot{\varrho}_{\rm m}=-\mu_0\nabla\cdot\mathbf{J}_{\rm m}$ で0にならない．だが，変位電流を導入したときのように，ファラデイの法則を

$$\nabla\times\mathbf{E}+\dot{\mathbf{B}}=-\mu_0\mathbf{J}_{\rm m}$$

とすれば，両辺の発散密度を計算しても矛盾することがなくなる．こうしてモノポールが存在するときの基本方程式は

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{E}+\dot{\mathbf{B}}&=-\mu_0\mathbf{J}_{\rm m},\qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{E}}=\mu_0\mathbf{J}\\ \nabla\cdot\mathbf{E}&=\frac{1}{\epsilon_0}\varrho,\qquad \nabla\cdot\mathbf{B}=\mu_0\varrho_{\rm m}\end{aligned} \tag{12.79}$$

のように極めて対称性のよい方程式になる．

電荷がなく磁荷のみがある場合は電磁場は磁位 $\phi_{\rm m}$ と磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}_{\rm m}$ によって表せる．電荷と磁荷が同時に存在する場合は電磁場は

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\dot{\mathbf{A}}-\nabla\times\mathbf{A}_{\rm m},\qquad \mathbf{B}=-\nabla\phi_{\rm m}-\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}_{\rm m}+\nabla\times\mathbf{A} \tag{12.80}$$

としなければならない．これらを (12.79) に代入すると，$\phi$ と $\mathbf{A}$ に対する方程式は磁荷がない場合と同じだが，$\phi_\mathrm{m}$ と $\mathbf{A}_\mathrm{m}$ に対する方程式は

$$\nabla^2\phi_\mathrm{m}+\frac{1}{c^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{A}}_\mathrm{m}=-\mu_0\varrho_\mathrm{m},\quad \Box^2\mathbf{A}_\mathrm{m}-\boldsymbol{\nabla}(\dot{\phi}_\mathrm{m}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}_\mathrm{m})=-\mu_0\mathbf{J}_\mathrm{m}$$

になる．ローレンスゲージ $\dot{\phi}_\mathrm{m}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}_\mathrm{m}=0$ を選べば

$$\Box^2\phi_\mathrm{m}=-\mu_0\varrho_\mathrm{m},\qquad \Box^2\mathbf{A}_\mathrm{m}=-\mu_0\mathbf{J}_\mathrm{m}$$

である．

電磁場は物質とは独立にエネルギーと運動量を持つ．すでに与えた電磁場のエネルギー密度，運動量密度，応力テンソルはモノポールの存在とは関係ない．そこで体積力密度 $\mathbf{f}$ は

$$\mathbf{f}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{T}-\dot{\mathbf{g}}$$

を計算すればよい．まず

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{T}=\epsilon_0\{\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}-\mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})\}+\frac{1}{\mu_0}\{\mathbf{B}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\}$$

が得られる．モノポールが存在するとき $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}$ を含む項を残しておかなければならない．また (12.42) のかわりに

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})=\dot{\mathbf{E}}\times\mathbf{B}-\mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})+\mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}+\dot{\mathbf{B}})$$

が成り立つ．右辺最後の項はモノポールがある場合は 0 ではない．こうして

$$\mathbf{f}=\epsilon_0\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}+\frac{1}{\mu_0}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{E}}\right)\times\mathbf{B}$$
$$+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}+\epsilon_0(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}+\dot{\mathbf{B}})\times\mathbf{E}$$

になる．ここでモノポールがある場合のマクスウェル方程式を使うと

$$\mathbf{f}=\varrho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}+\varrho_\mathrm{m}\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\mathbf{J}_\mathrm{m}\times\mathbf{E}\tag{12.81}$$

が得られる．これから，電荷 $q$ に働くローレンツ力が $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ であるのに対し磁荷 $q_\mathrm{m}$ に働く力は

$$\mathbf{F}_\mathrm{m}=q_\mathrm{m}\left(\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right)$$

である．右辺の最初の項は (8.29) で得たものである．

## 12.15 ディラックのひも

ヘヴィサイドは，オームの法則との類推から，磁流密度と磁場の間に比例関係を仮定したが，最後の式では磁気伝導率 $g_{\mathrm{m}}$ を 0 と置いた．ヘヴィサイドは電子の発見後，磁気モノポール（後に磁気モーメントの単位として使われるようになった磁子と名づけていた）が発見される可能性を考えていたようである．ディラック (P. A. M. Dirac, 1902-84) は 1931 年に陽電子と反陽子を予言した同じ論文の中で，モノポールが単なる数学的な道具ではなく現実に存在する可能性を示したのである．

座標の原点に置かれたモノポールの磁荷 $q_{\mathrm{m}}$ は (12.78) から磁場

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\frac{\mathbf{x}}{r^3} \tag{12.82}$$

をつくる．だが，磁場が発散密度を持つからもはや $\mathbf{B}$ をベクトルポテンシャルで表すことができない．この困難を避ける方法を考えてみよう．原点に固定されたモノポールを中心とする球面上の，北極にある微小な面を通る磁束は，その面を取りまく閉曲線の循環になり，$\int \mathrm{d}S\mathbf{n}\cdot\mathbf{B} = \oint \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}$ で与えられる．閉曲線を球面上で次第に大きくし，南極を取りまく無限小の閉曲線にまで変化させると，左辺の磁束は $\mu_0 q_{\mathrm{m}}$ になる．一方，右辺の線積分は 0 になってしまう．このような矛盾が起こらないためには，ベクトルポテンシャルが $z$ 軸上の原点から $z=-\infty$ まで伸びる特異性を持っていて，それを囲む線積分が $\mu_0 q_{\mathrm{m}}$ になればよい．この特異性がディラックのストリング（ひも）である．すなわち，原点に置かれたモノポールから球対称に湧き出た磁束が無限遠まで広がり，$z$ の負の無限遠からストリング L を通って原点に流れ込んでいる．ベクトルポテンシャルがどのような形を持つか調べてみよう．

$z$ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_z$ として，磁場が

$$\mathbf{B}_{\mathrm{L}} = \mu_0 q_{\mathrm{m}}\delta(x)\delta(y)\theta(-z)\mathbf{e}_z$$

であればストリングを流れる磁束は，ストリングに垂直な面積要素で積分して

$$\int \mathrm{d}S\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_{\mathrm{L}} = -\mu_0 q_{\mathrm{m}}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\delta(x)\delta(y)\theta(-z) = -\mu_0 q_{\mathrm{m}}\theta(-z)$$

になる（$\mathbf{n}$ は $-z$ 軸方向を向いている）．そこで

$$\mathbf{B}_{\mathrm{sol}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_{\mathrm{L}} = \frac{\mu_0 q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\frac{\mathbf{x}}{r^3} + \mu_0 q_{\mathrm{m}}\delta(x)\delta(y)\theta(-z)\mathbf{e}_z$$

は原点を中心とする任意の閉曲面上でその法線方向成分を積分したものが 0，すなわち $\nabla \cdot \mathbf{B}_{\rm sol} = 0$ であるから

$$\mathbf{B}_{\rm sol} = \nabla \times \mathbf{A}$$

と書くことができる．モノポールのつくる磁場は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} - \mu_0 q_{\rm m} \delta(x)\delta(y)\theta(-z)\mathbf{e}_z$$

になる．(7.30) では半無限の直線電流がつくる磁場を求めたが，アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ と $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ を比較し，(7.12) を翻訳して，ストリング磁場からベクトルポテンシャルを

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 q_{\rm m}}{4\pi} \int_{\rm L} {\rm d}\mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

によって計算することができる．積分はストリングに沿って行う．(7.30) から

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 q_{\rm m}}{4\pi} \frac{\rho}{r(r+z)} = \frac{\mu_0 q_{\rm m}}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r(1+\cos\theta)} \tag{12.83}$$

である．実際に微分すればストリング上 $(z = -r)$ 以外で $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ になっている．また $z = -r$ 近傍では (2.13) を用いて

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 q_{\rm m}}{2\pi\rho}$$

になる．直線電流 $I$ のつくる磁場 $B_\varphi = \mu_0 I / 2\pi\rho$ が $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 I \delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z$ を満たすことを思い出すと

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 q_{\rm m}}{4\pi} \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \mu_0 q_{\rm m} \delta(x)\delta(y)\theta(-z)\mathbf{e}_z$$

になり，確かに $\mathbf{B}_{\rm sol} = \nabla \times \mathbf{A}$ が成り立つ．こうして，ディラックが考えたベクトルポテンシャルは負の $z$ 軸上で特異性を持ち，それ以外でモノポールの磁場をつくっている．ストリング上の磁場が原点に向かって流れ込んで，原点のモノポールから湧き出す全磁束を打ち消しているからベクトルポテンシャルを導入できたのである．モノポールのつくる磁場は，ベクトルポテンシャルのつくる磁場からストリング上の磁場を除いたものである．ストリングが任意の方向 $\mathbf{n}$ を向いているときは，ベクトルポテンシャルは (12.83) から

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 q_{\rm m}}{4\pi} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{x}}{r(r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})} \tag{12.84}$$

になる．

このようなストリングは物理的なものではない．このことを見るために原点から $z=\infty$ まで伸びるストリング $\mathbf{L}'$ を考えてみよう．そのベクトルポテンシャルは (12.84) から

$$A'_\varphi = -\frac{\mu_0 q_{\rm m}}{4\pi}\frac{\rho}{r(r-z)} = -\frac{\mu_0 q_{\rm m}}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r(1-\cos\theta)}$$

で与えられる．2つのベクトルポテンシャルの差を取ると

$$A'_\varphi - A_\varphi = -\frac{\mu_0 q_{\rm m}}{2\pi\rho} = -\frac{\mu_0 q_{\rm m}}{2\pi r\sin\theta}$$

になるから

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda, \qquad \Lambda = -\frac{\mu_0 q_{\rm m}}{2\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x} = -\frac{\mu_0 q_{\rm m}}{2\pi}\varphi \tag{12.85}$$

と書くことができる．ストリング上以外では $\mathbf{A}$ も $\mathbf{A}'$ も同じ磁場を与えるから差 $\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}'-\mathbf{A})$ は L と L$'$ でつくる線上でのみ値を持つ．ストリングを流れる磁束は

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot(\mathbf{A}'-\mathbf{A}) = -\frac{\mu_0 q_{\rm m}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = -\mu_0 q_{\rm m}$$

である．これは

$$\mathbf{B}_{\rm L} = \mu_0 q_{\rm m}\delta(x)\delta(y)\theta(-z)\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{B}_{\rm L'} = -\mu_0 q_{\rm m}\delta(x)\delta(y)\theta(z)\mathbf{e}_z$$

を用いて

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}'-\mathbf{A}) = -\mu_0 q_{\rm m}\delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z = \mathbf{B}_{\rm L'} - \mathbf{B}_{\rm L}$$

と書けるから

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} - \mathbf{B}_{\rm L} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}' - \mathbf{B}_{\rm L'}$$

が得られる．このことから原点から $z=\infty$ に伸びたストリング L$'$ は，原点から $z=-\infty$ に伸びたストリング L のゲージ変換で与えられる．つまり，ゲージ変換はストリングを原点のまわりに回転させる働きをする．ストリングの位置が任意であるということはそれが物理的自由度ではないことを表している．

## 12.16 オーロラ：ビルケラン - ポアンカレー効果

1896 年にビルケラン (K. O. B. Birkeland, 1867-1917) は，北極近傍の地球磁場に捕らえられた太陽からの荷電粒子によってオーロラを説明した．ビルケランは磁石を電子ビーム中に挿入して磁石の極近くでオーロラに似た現象を見つけたのである．この現象を理論的に説明したのがポアンカレーである (ビルケラン - ポアンカレー効果)．J. J. トムソンが電子を発見する前年 (1896) のことである．後にステルマー (F. C. M. Størmer, 1874-1957) は地球を磁気双極子としたオーロラ模型を議論しているが，ポアンカレーは一方の極付近のみを考えた．原点に静止している磁荷 $q_{\rm m}$ のモノポールがつくる磁場の中で，質量 $m$，電荷 $q$ の点電荷の運動を考えよう．モノポールが点電荷の位置 $\mathbf{z}$ に磁場 (12.82) をつくるから，$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{z}}$ を点電荷の速度とすると，点電荷はポアンカレー方程式



図 12.10 ポアンカレー

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q q_{\rm m}}{4\pi r^3}\mathbf{v} \times \mathbf{z}$$

を満たす．$\mathbf{v}$ に直交するローレンツ力は $\frac{1}{2}mv^2$ を一定に保つが，$\mathbf{z}$ にも直交するから

$$\mathbf{z} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{1}{2}r^2\right) - v^2 = 0$$

が成り立つ．初期条件として，$t = 0$ で $r = r_0$，$\dot{r} = 0$ とすれば

$$r^2 = r_0^2 + v^2 t^2$$

が得られる．点電荷が持つ角運動量 $\mathbf{l}^{\rm mech} = \mathbf{z} \times m\mathbf{v}$ の時間変化は

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}^{\rm mech}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 q q_{\rm m}}{4\pi r^3}\mathbf{z} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{z}) = \frac{\mu_0 q q_{\rm m}}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathbf{z}}{r}$$

である．これから，角運動量 $\mathbf{l}^{\mathrm{mech}}$ は保存されないが，全角運動量

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}^{\mathrm{mech}} - \frac{\mu_0 q q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\frac{\mathbf{z}}{r} \tag{12.86}$$

が保存される．$\mathbf{l}$ をフィールツベクトルと言う (M. Fierz, 1912-2006)．第2項の意味は次節で調べることにし，点電荷の運動を求めてみよう．定数ベクトル $\mathbf{l}$ を $z$ 軸とする球座標によって $\mathbf{z}$ を表し，(12.86) と $\mathbf{z}/r$ との内積を取ると

$$l\cos\theta = -\frac{\mu_0 q q_{\mathrm{m}}}{4\pi}$$

だから $\theta$ は定数である．したがって点電荷はポアンカレー円錐と呼ばれる面上を原点に向かって運動し，$r_0$ に達した後，再び遠ざかっていく．これがビルケランの見つけた効果で，荷電粒子が磁場の強い場所に近づき跳ね返される性質は磁気鏡として知られている．太陽コロナからの荷電粒子（太陽風）が地球の磁場に捕らえられてつくる帯がヴァン・アレン帯である (J. Van Allen, 1914-2006)．1619年にケプラー (J. Kepler, 1571-1630) は，彗星の尾がいつも太陽と反対向きに伸びているのは太陽光によるという説を唱えた．レーベデフ (P. N. Lebedev, 1866-1912) は太陽光の輻射圧によると考えた（輻射圧については13.5節参照）．彗星は2本の尾を持ち，塵からなる尾は輻射圧によるが，もう一方のプラズマからなる尾は，1951年にビールマン (L. Biermann, 1907-86) が太陽風を仮定することによって説明した．

$l_z^{\mathrm{mech}} = m\rho^2\dot{\varphi}$ を用いると (12.86) の $z$ 成分は

$$l_z = m\rho^2\dot{\varphi} - \frac{\mu_0 q q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\cos\theta$$

である．したがって $m\rho^2\dot{\varphi}$ は定数である．$t=0$ では点電荷の速度は方位角方向の成分 $\rho\dot{\varphi}$ のみを持つから $v$ に等しく，$m\rho^2\dot{\varphi} = mvr_0\sin\theta$，すなわち

$$\dot{\varphi} = \frac{r_0 v}{r^2\sin\theta} = \frac{r_0 v}{\sin\theta}\frac{1}{r_0^2 + v^2t^2}, \qquad \varphi = \frac{1}{\sin\theta}\tan^{-1}\frac{vt}{r_0}$$

である．軌道の方程式は

$$r = r_0 \sec(\varphi\sin\theta)$$

で与えられる．

## 12.17　トムソン双極子

(12.86) で加わった量は，J. J. トムソンが 1900 年に示したように，電磁場の持つ角運動量にほかならない．電荷密度 $\varrho$，磁荷密度 $\varrho_{\mathrm{m}}$ が与えられたとき，電位 $\phi$ と磁位 $\phi_{\mathrm{m}}$ がつくられ，電場 $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ と磁場 $\mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla}\phi_{\mathrm{m}}$ がつくられる．このとき電磁場は (12.55) で定義された角運動量

$$\boldsymbol{\Gamma} = \epsilon_0 \int \mathrm{d}V \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \epsilon_0 \int \mathrm{d}V \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\nabla}\phi \times \boldsymbol{\nabla}\phi_{\mathrm{m}})$$

を持つ．被積分関数は

$$-\phi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{\nabla}\phi + \phi\boldsymbol{\nabla}\phi_{\mathrm{m}} - \boldsymbol{\nabla}(\phi_{\mathrm{m}}\phi) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{x}\phi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{\nabla}\phi) - \boldsymbol{\nabla}(\phi_{\mathrm{m}}\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi)$$

と書き直せる．後の 3 項の積分は表面積分になるが，半径の大きな球面を取ると $n_j = x_j/r$，$\phi \sim 1/r$，$\phi_{\mathrm{m}} \sim 1/r$ であるから落としてよい．残りを (8.6) によって

$$-\int \mathrm{d}V(\phi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\phi_{\mathrm{m}}) = \int \mathrm{d}V \mathbf{x}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\phi_{\mathrm{m}})$$

のように変形すると

$$\boldsymbol{\Gamma} = \epsilon_0 \int \mathrm{d}V \mathbf{x}(\phi_{\mathrm{m}}\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\phi_{\mathrm{m}}) = \epsilon_0 \int \mathrm{d}V \mathbf{x}\left(-\frac{1}{\epsilon_0}\varrho\phi_{\mathrm{m}} + \mu_0\varrho_{\mathrm{m}}\phi\right)$$

が得られる．$\mathbf{z}_1$ に電荷 $q$，$\mathbf{z}_2$ に磁荷 $q_{\mathrm{m}}$ が静止して置かれているとき，

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_1|}, \qquad \phi_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0 q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_2|}$$

である．また $\varrho(\mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_1)$，$\varrho_{\mathrm{m}}(\mathbf{x}) = q_{\mathrm{m}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_2)$ である．このときポアンカレーの表式

$$\boldsymbol{\Gamma} = -\frac{\mu_0 q q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\frac{\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2}{|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|} \tag{12.87}$$

が得られる．磁気モノポールと電荷からなる双極子をトムソン双極子と呼ぶこともある．またポアンカレーが導き，トムソンが双極子の持つ電磁場の角運動量として説明した (12.87) をトムソンの定理とも言う．

量子力学では，角運動量の大きさは $\hbar$ の半整数倍，または整数倍でなければならない．軌道角運動量 $\mathbf{l}^{\mathrm{mech}}$ は $\hbar$ の整数倍でなければならないから，全

角運動量 $\mathbf{l}$ が $\hbar$ の半整数倍であるとすれば，$n$ を整数として

$$\frac{\mu_0 q q_{\mathrm{m}}}{4\pi} = \frac{h}{2\pi}\frac{n}{2} \tag{12.88}$$

になる．これは 1936 年にサハ (M. N. Saha, 1893-1956)，1949 年にウィルソン (H. A. Wilson, 1874-1964) が独立に導いたディラックの量子化条件である（この量子化条件は 17.6.2節で導く）．電荷として $e$ を取ると磁荷は最小単位 $e_{\mathrm{m}} = h/e$ を持つ．その大きさを物質の電磁的相互作用の大きさを特徴づける量である無次元のゾマーフェルトの微細構造定数

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \tag{12.89}$$

で表すと

$$\alpha_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0 e_{\mathrm{m}}^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{4\alpha} = 34.259\ldots$$

である．もしモノポールが存在すればその大きさは量子化され，素電荷に比べ素磁荷は非常に大きいことになる．逆に言えば，もしモノポールが存在すれば，電荷が量子化される理由がつく．だが，なぜモノポールが量子化されているかは説明してくれない．モノポールがそのまわりに持つ磁束

$$\Phi = \oint \mathrm{d}S\mathbf{n}\cdot\mathbf{B} = \mu_0 q_{\mathrm{m}}$$

は (11.13) で現れた磁束量子 $\phi_0 = h/e$ の整数倍しか取ることができない．

ヴァイルは「私の仕事はいつも真実と美しさを統一するようにすることだった．だが，どちらかを選択せざるをえないときは，私は普通は美しさを選んだ」と言っている．ディラックもまた美しさを好んだ．だがディラックが予言した陽電子は 1932 年にアンダーソン (C. D. Anderson, 1905-91) によって，反陽子は 1955 年にチェンバレン (O. Chamberlain, 1920-2006) とセグレ (E. G. Segrè, 1905-89) によって発見されたが，モノポールは見つからなかった．ディラックは「理論的には，その数学的な美しさからモノポールが存在すべきだと考えるだろう．だがそれを探す多くの試みのすべては成功しなかった．そこで，数学的に美しいというだけで自然がそうなっているという理由にはならない，と結論すべきであろう．自然の基本原理を探究するためにわれわれはもっとたくさん学ぶべきことがある」とも述べている．

で電磁ポテンシャルを導入し，元のシュレーディンガー方程式で

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi, \qquad -i\hbar\boldsymbol{\nabla} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}$$

のミニマルな置きかえをして (17.30) にすると，確かに局所的変換に対してもシュレーディンガー方程式が不変になる．このような要請をヴァイルの「局所的ゲージ不変の原理」と呼び，こうして導入された場の量 $\phi$，$\mathbf{A}$ をゲージ場と言う．ミニマルな置きかえというのはゲージ不変性から要請されるわけではない．正準運動量はローレンツ力を電磁ポテンシャルで書きかえることによって現れた．もしゲージ不変性を満たすだけなら $\mathbf{p} - q\mathbf{A}^{\mathrm{L}}$ とすれば十分である．ところが，電磁場の運動量からの寄与はゲージ不変な $q\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ である．ミニマルな置きかえ $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$ の中の $\mathbf{A}$ にはゲージ不変な $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ があり，それこそ磁場を与えているのである．ミニマルな置きかえはゲージ不変性よりも強い要請である．

## 17.6.2　ロンドンの位相因子：アハロノフ - ボーム効果

ロンドンの位相因子は実際に観測にかかる．有名なアハロノフ - ボーム効果 (1959) を考えてみよう (Y. Aharonov, 1932-, D. Bohm, 1917-92)．電子ビームを，ソレノイドの外側の磁場のない空間の，2 つの異なる経路 1，2 を通過させ干渉させると，干渉領域の波動関数は

$$\psi = \psi_1^{(0)} e^{i\frac{q}{\hbar}L_1} + \psi_2^{(0)} e^{i\frac{q}{\hbar}L_2}$$

になる．$L_1$，$L_2$ は，それぞれ経路 1，2 を通るベクトルポテンシャルの線積分である．干渉領域での確率密度は

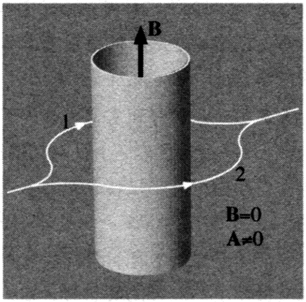



**図 17.4**　アハロノフ - ボーム効果

$$|\psi|^2 = \left|\psi_1^{(0)} + e^{i\frac{q}{\hbar}(L_2-L_1)}\psi_2^{(0)}\right|^2$$

になる．第 2 項に現れる位相因子は，ソレノイドの外側を回る閉曲線に沿っての線積分になる．さらに回転定理を使えば

$$L_2 - L_1 = \oint \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \int \mathrm{d}S\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \Phi \tag{17.34}$$

すなわち，その面を通過する磁束である．電子は磁場のない場所を通過しているにもかかわらず，電子線ビームは磁場の影響を受ける．チェンバーズ (R. G. Chambers, 1924-) が 1960 年に最初に実験的検証を行った．1986 年には外村彰 (1942-) のグループが，ドーナツ状の磁石を超伝導体で覆って磁場が漏れないようにし，ドーナツの孔の中と外を通過した電子線の干渉縞のずれを観測し，アハロノフ - ボーム効果の検証に成功した．

ヘヴィサイド，ヘルツ以来，電磁ポテンシャルは補助的な量とみなされてきた．だが，荷電粒子が量子化されると，電磁ポテンシャルは新たな意味を持つことになる．電子の波動関数の持つ位相は，電子が通過する領域の電磁ポテンシャルに依存している．すなわち，量子力学では，電磁場だけでは粒子の運動を完全には記述できないのである．もちろんゲージ変換の自由度があるから電磁ポテンシャルは物理的でない自由度を含んでいる．位相の差 $\frac{q}{\hbar}\Phi$ も，ゲージ変換によって $2\pi$ だけ変化しても観測に影響しないから，物理的自由度は位相因子 $P = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Phi}$ である．こうして，電磁場の力学的自由度は，電場と磁場に加えて $P$ である．それらはいずれもゲージ変換に対する不変量である．電磁場が局所的な量であるのに対し，$P$ は積分量，すなわち大局的な量である．

モノポールが存在するときのディラックの量子化条件について述べておきたい．ディラックのストリングは任意の方向を向くことができるが，それらはゲージ変換で互いに移り変わることができるから，物理的な存在ではなかった．ここで，アハロノフ - ボーム効果をストリングについて考えてみよう．ソレノイドをストリングに置きかえ，ストリングを回る 2 つの経路を通過する荷電粒子の波動関数を考えると，2 つの経路からなる閉曲線内を貫く磁束は $\int \mathrm{d}S\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 q_{\mathrm{m}}$ である．アハロノフ - ボーム効果による干渉が観測されないためには，2 つの経路を通る波動関数の位相の差が $2\pi$ の整数倍，すなわち

$$\frac{\mu_0 q q_{\mathrm{m}}}{\hbar} = 2\pi n \tag{17.35}$$

でなければならない．これがディラックの量子化条件である．このことは次

のようにも考えられる．例えば原点から $z$ 軸の負の方向に伸びたストリングと，正の方向に伸びたストリングは，(12.85) によって与えられたゲージ関数 $\Lambda = -\mu_0 q_{\mathrm{m}}\varphi/2\pi$ によって結びつけられている．ところがこのゲージ変換でモノポールの波動関数は

$$\psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Lambda}\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu_0 q q_{\mathrm{m}}/2\pi\hbar)\varphi}\psi$$

になる．$\psi$ はすべての変数の 1 価関数であるから，$z$ 軸のまわりを 1 回転し，$\varphi \to \varphi + 2\pi$ としても不変である．一方，$\psi'$ は 1 回転すると $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu_0 q q_{\mathrm{m}}/\hbar)}\psi'$ に変換される．そこで $\psi'$ が不変であるためには，(17.35) が成り立っていなければならないのである．

図 17.5 のように，辺の長さが $L$ の正方形の断面を持つ直方体を考えよう．断面に垂直に一様磁場が作用し，直方体は磁場の方向には無限に長いとする．周期的境界条件のもとに量子化を行ってみよう．磁場があるときはベクトルポテンシャルを周期的にすることはできない．断面を貫く磁束は境界に沿ってベクトルポテンシャルを 1 周積分した

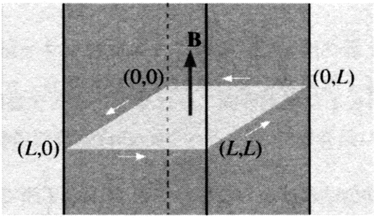



**図 17.5**　磁束の量子化

$$\Phi = \int_0^L \mathrm{d}x A_x(x,0) + \int_0^L \mathrm{d}y A_y(L,y) - \int_0^L \mathrm{d}x A_x(x,L) - \int_0^L \mathrm{d}y A_y(0,y)$$

である．$A_x(x,L) = A_x(x,0)$，$A_y(L,y) = A_y(0,y)$ となる周期的ベクトルポテンシャルでは磁束は 0 になってしまう．だが，ベクトルポテンシャルはゲージ自由度を除いて周期的であればよい．すなわちゲージ変換によって

$$\mathbf{A}(x+L,y) = \mathbf{A}'(x,y) = \mathbf{A}(x,y) + \boldsymbol{\nabla}\Lambda_x(x,y)$$
$$\mathbf{A}(x,y+L) = \mathbf{A}'(x,y) = \mathbf{A}(x,y) + \boldsymbol{\nabla}\Lambda_y(x,y)$$

になっていればよい．このとき電子の波動関数もゲージ変換

$$\psi(x+L,y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Lambda_x(x,y)}\psi(x,y), \quad \psi(x,y+L) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Lambda_y(x,y)}\psi(x,y)$$

を受ける．$(L,0)$ における波動関数は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Lambda_x(0,0)}\psi(0,0)$，$(L,L)$ における波動関数は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Lambda_y(L,0)}\psi(L,0)$ である．原点から出発し，境界を 1 周して元に戻ったとき，電子の波動関数は

$$\psi(0,0)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Lambda_y(0,0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Lambda_x(0,L)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Lambda_y(L,0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Lambda_x(0,0)}\psi(0,0)$$

になるがアハロノフ - ボーム効果によって $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Phi}\psi(0,0)$ に等しい．すなわち

$$\Phi=\Lambda_x(0,0)+\Lambda_y(L,0)-\Lambda_x(0,L)-\Lambda_y(0,0)$$

になっていなければならない．ゲージ関数として

$$\Lambda_x(x,y)=-\frac{y}{2L}\Phi,\qquad \Lambda_y(x,y)=\frac{x}{2L}\Phi$$

を選べばよい．このような変換をラージゲージ変換と言う．電子の波動関数は 1 価関数でなければならないから，$n$ を任意の整数として

$$\Phi=n\Phi_0,\qquad \Phi_0=\frac{2\pi\hbar}{q}=\frac{h}{q}$$

でなければならない．これが 12.12 節で述べた磁束の量子化である．

1950 年に F. ロンドンが提案した超伝導における磁束の量子化とディラックの量子化条件は数学的には極めて似た事情にある．超伝導体内部ではマイスナー - オクセンフェルト効果によって磁場が 0 であるから，スカラー関数 $\Lambda$ を用いて $\mathbf{A}=\boldsymbol{\nabla}\Lambda$ と書くことができる．これは，電流のないときに磁場が磁位で表せたのと似ている．磁位が 1 価関数ではなかったように，$\Lambda$ も 1 価関数ではなく，磁場がない閉じた経路を選んでも，その経路の内部に磁束があれば，回転定理によって

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Lambda=\int \mathrm{d}S\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}=\Phi$$

になり 0 にはならない．このベクトルポテンシャルの電子の波動関数に対する影響は，(17.33) から，位相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Lambda}$ である．このため，ある経路を 1 周して元の位置に戻ると，波動関数には $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\Phi}$ だけの位相因子が加わる．波動関数が 1 価関数であるためには $\frac{q}{\hbar}\Phi$ は $2\pi$ の整数倍でなければならない．こうして磁束が量子化される．